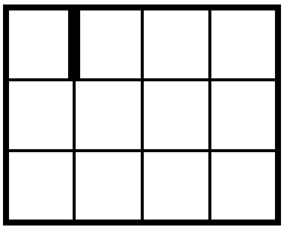
18ème Rallye Mathématique Transalpin, épreuve d'essai Pour la section de Bourg en Bresse

Vous trouverez ci-dessous, les problèmes de la catégorie 5 (CM2) qui sont suivis des analyses à priori et des attributions de points qui sont en vigueur sur le Rallye.
Cette épreuve d'essai doit vous permettre de savoir avec vos élèves si la participation au rallye Est envisageable tout en dégageant des pistes de travail pour le comportement à avoir face à une telle situation.

4. PAS DE JALOUX (Cat. 3, 4, 5)

Amandine veut partager ce rectangle en deux parties ayant chacune le même nombre de carreaux, mais pas forcément la même forme. Tous les carreaux doivent rester entiers et le découpage doit donc suivre les lignes du quadrillage.

Amandine a commencé le partage, en traçant un premier trait (plus large sur la figure) :



Continuez le partage commencé par Amandine.

Trouvez toutes les façons de continuer le partage d'Amandine pour obtenir deux parties ayant le même nombre de carreaux.

5. BILLES (Cat. 3, 4, 5)

Anne, Béatrice et Charles ont joué aux billes avec d'autres camarades.
À eux trois, ils ont gagné 20 billes en tout.
Charles a gagné deux fois plus de billes que Béatrice.
Anne n'a pas gagné plus de billes que Béatrice.

Combien de billes peut avoir gagné chacun des trois enfants ?

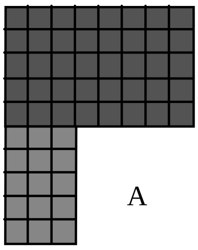
Expliquez votre raisonnement.

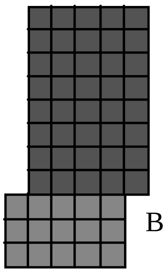
6. LES DEUX RECTANGLES (Cat. 4, 5, 6)

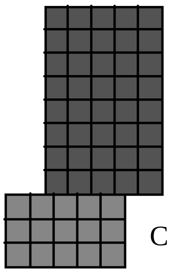
On découpe deux rectangles dans une feuille de papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillage. Les dimensions du premier rectangle sont 5 et 8, celles du second sont 5 et 3 (unité : le côté d'un carré du quadrillage).

On place ces deux rectangles l'un contre l'autre, sans les superposer, de façon à ce qu'ils se touchent par un ou plusieurs côtés entiers de carreaux. (Un carreau d'un rectangle ne peut en toucher qu'un seul de l'autre rectangle, par un côté entier.) On peut obtenir ainsi de nombreuses figures.

(Exemples : Les figures A et B sont correctes. La figure C est incorrecte car il y a des carreaux d'un rectangle qui touchent deux carreaux de l'autre rectangle.)


A


B


C

Les figures obtenues n'ont pas toutes le même périmètre. Par exemple, le périmètre de A mesure 36 unités, celui de B en mesure 34.

Quel est le plus petit périmètre que peut avoir une figure obtenue en assemblant ces deux rectangles en respectant les règles d'assemblage ?

Et quel est le plus grand périmètre qu'on peut obtenir ?

Expliquez comment vous avez trouvé et montrez vos solutions.

7. CARTES CARREES (Cat. 4, 5, 6)

Grégory a 81 cartes carrées, de même dimension, avec une face blanche et l'autre face grisée.

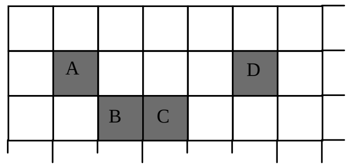
Il les dispose toutes, les unes contre les autres, pour obtenir un grand carré entièrement blanc.

Thomas lui propose un défi : *Essaie de retourner le plus possible de cartes pour faire apparaître leur face grisée.*

Mais attention, à la fin, chaque face grise devra avoir au moins 7 faces voisines blanches.

Deux cartes sont voisines si elles ont un sommet ou un côté commun.

(Dans cet exemple, les cartes A et C avec les faces grises ont 7 voisines avec des faces blanches, et D en a 8, mais B n'en a que 6 !)



Combien de cartes Grégory peut-il retourner au maximum ?

Expliquez votre raisonnement et dessinez une de vos solutions.

8. UNE CROISSANCE EXTRAORDINAIRE (Cat. 5, 6, 7)

Quand ils vivaient dans notre pays, Hugues mesurait 115 cm, Léo 130 cm, Sara 135 cm, Eddy 145 cm.

Depuis quelques années ils vivent dans un autre pays nommé « Biengrandir », où l'unité de mesure est le *gra*.

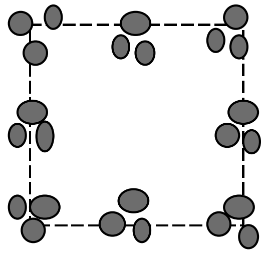
Aujourd'hui, ils se mesurent et ils voient que Hugues a grandi de 7 *gra*, Léo de 6 *gra*, Sara et Eddy ont grandi chacun de 3 *gra*.

Sara s'aperçoit d'une chose étrange : maintenant ils n'ont plus quatre tailles différentes, mais deux enfants ont la même taille et les deux autres aussi.

Trouvez à combien de cm correspond le *gra*.

Expliquez votre raisonnement.

9. UN ŒIL SUR LES PIERRES ! (Cat. 5, 6, 7)



Julien est en vacances à la mer. Sur la plage, il ramasse des pierres et les dispose par petits tas de trois, en forme de carré, comme sur ce dessin :

Selon cette disposition, il y a 9 pierres par côté.

Julien ramasse encore 4 autres pierres et, avec les premières, forme une nouvelle disposition :

- il y a de nouveau 8 tas, disposés en carré ;
- il y a de nouveau 9 pierres par côté ;
- il y a le même nombre de pierres dans tous les tas situés au milieu des côtés du carré.

Combien peut-il y avoir de pierres dans les tas de la nouvelle disposition ?

Montrez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

10. LA PLUS PETITE DIFFÉRENCE (Cat. 5, 6, 7)

Cette grille est partagée en deux régions par une ligne continue, épaisse, qui suit le quadrillage.

Lorsqu'on additionne les nombres de chacune de ces régions, on constate que la différence entre les deux sommes obtenues est 39.

3	15	16	22
7	13	2	43
40	30	35	17
19	18	12	5

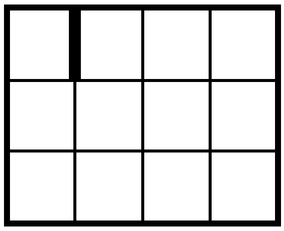
Il est possible de trouver une différence plus petite en découpant la grille en deux parties seulement, selon d'autres lignes.

Dessinez la ligne de partage qui donne la plus petite différence possible et notez vos calculs.

4. PAS DE JALOUX (Cat. 3, 4, 5)

Amandine veut partager ce rectangle en deux parties ayant chacune le même nombre de carreaux, mais pas forcément la même forme. Tous les carreaux doivent rester entiers et le découpage doit donc suivre les lignes du quadrillage.

Amandine a commencé le partage, en traçant un premier trait (plus large sur la figure) :



Continuez le partage commencé par Amandine.

Trouvez toutes les façons de continuer le partage d'Amandine pour obtenir deux parties ayant le même nombre de carreaux.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie

Analyse de la tâche

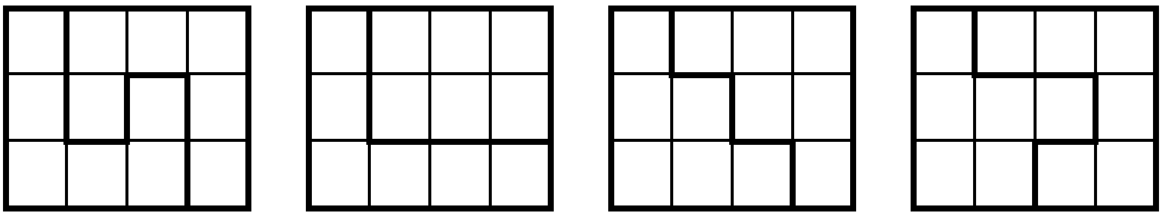
- Procéder par essais en partageant le rectangle en deux parties et en comptant le nombre de carreaux contenus dans chacune des parties.

Ou : Poursuivre le tracé commencé par Amandine en contrôlant dans le même temps le nombre de carreaux de part et d'autre de la ligne tracée.

Ou : Dénombrer le nombre de carreaux contenus dans le rectangle, le diviser par 2 et tracer une ligne de façon à faire apparaître une partie contenant exactement 6 carreaux

Attribution des points

4 Réponse correcte : les 4 bonnes possibilités uniquement :



3 Les 4 bonnes possibilités et une solution erronée (parties non équivalentes, partage ne suivant pas les lignes, répétition d'un partage)
ou 3 possibilités correctes, sans réponse erronée

2 Trois possibilités correctes et une solution erronée
ou 2 possibilités correctes, sans solution erronée
ou quatre possibilités correctes accompagnées de plus d'une réponse erronée

1 Deux possibilités correctes avec présence d'une ou plusieurs solutions erronées
ou une possibilité correcte avec présence ou non de solutions erronées
ou trois possibilités correctes accompagnées de plus d'une réponse erronée

0 Absence de réponse correcte ou incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4 - 5

Origine : Bourg-en-Bresse

5. BILLES (Cat. 3, 4, 5)

Anne, Béatrice et Charles ont joué aux billes avec d'autres camarades.

À eux trois, ils ont gagné 20 billes en tout.

Charles a gagné deux fois plus de billes que Béatrice.

Anne n'a pas gagné plus de billes que Béatrice.

Combien de billes peut avoir gagné chacun des trois enfants ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et décomposition additive

Analyse de la tâche

- Commencer la recherche par le nombre de billes de B. Par exemple : si B a 1 bille, C en a 2, mais A ne peut en avoir gagnée qu'une et la somme n'est pas 20 ; si B a 2 billes, C en a 4 et A 1 ou 2, ce qui ne donne toujours pas une somme de 20, et ainsi de suite jusqu'au cas où B en a 5, C 10 et A 5 et au cas où B en a 6, C 12 et A 2. On vérifie ensuite que si on augmente encore le nombre de billes de B, on arrive à une somme supérieure à 20.

Ou : comprendre que le nombre de billes de Charles est pair. Commencer par faire un choix de nombres pour celui-ci. Se rendre compte que 20, 18, 16 et 14 sont trop grands, examiner 12 et trouver 6 pour B et 2 pour A, puis examiner 10, qui conduit à 5 pour B et 5 pour A et finalement constater que pour les nombres pairs suivants, 8, 6, … le nombre de billes de A serait supérieur à celui de B.

Ou : décomposer 20 en une somme de trois nombres et vérifier que les conditions sont respectées.

Ou : diviser 20 par 4, constater que 5 (A), 5 (B), 10 (C) est une solution convenable ; essayer ensuite avec 6 (B) e 12 (C) et par conséquent 2 (A) et déduire qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Attribution des points

4 Réponse correcte : les deux solutions (Anne : 5, Béatrice : 5, Charles : 10 et Anne : 2, Béatrice : 6, Charles : 12) avec explication de la démarche qui montre qu'il n'y a pas d'autre solution

3 Les deux solutions correctes avec explications peu claires, incomplètes ou avec seulement une vérification

2 Les deux solutions correctes sans explication ou une solution avec explications

1 Une solution correcte sans explication ou début de résolution organisée

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4 - 5

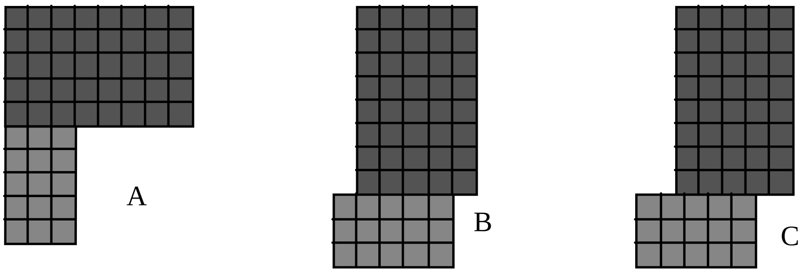
Origine : Parme

6. LES DEUX RECTANGLES (Cat. 4, 5, 6)

On découpe deux rectangles dans une feuille de papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillage. Les dimensions du premier rectangle sont 5 et 8, celles du second sont 5 et 3 (unité : le côté d'un carré du quadrillage).

On place ces deux rectangles l'un contre l'autre, sans les superposer, de façon à ce qu'ils se touchent par un ou plusieurs côtés entiers de carreaux. (Un carreau d'un rectangle ne peut en toucher qu'un seul de l'autre rectangle, par un côté entier.) On peut obtenir ainsi de nombreuses figures.

(Exemples : Les figures A et B sont correctes. La figure C est incorrecte car il y a des carreaux d'un rectangle qui touchent deux carreaux de l'autre rectangle.)



Les figures obtenues n'ont pas toutes le même périmètre. Par exemple, le périmètre de A mesure 36 unités, celui de B en mesure 34.

Quel est le plus petit périmètre que peut avoir une figure obtenue en assemblant ces deux rectangles en respectant les règles d'assemblage ?

Et quel est le plus grand périmètre qu'on peut obtenir ?

Expliquez comment vous avez trouvé et montrez vos solutions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangles, polygones et périmètres
- Arithmétique : additions

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, comprendre les règles de formation des figures à partir des deux rectangles et ce que représente leur périmètre en s'aidant pour cela des deux exemples fournis.
- Dessiner d'autres figures ou les construire par déplacements de rectangles mobiles découpés dans du papier quadrillé et calculer leur périmètre. Trouver ainsi, par essais successifs, que le plus petit périmètre est 32 et le plus grand 40.
- Comprendre que le périmètre des figures est plus petit que la somme des deux périmètres des rectangles (42 = 26 + 16) et qu'il dépend de la longueur de la partie commune, indépendamment de la forme de la figure, ce qui permet d'expliquer que, si cette partie mesure 1 (la plus petite possible), le périmètre sera 42 – 2 x 1 = 40 et si cette partie mesure 5 (la plus grande possible), le périmètre sera 42 – 2 x 5 = 32.

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (32 et 40) avec explications (reposant sur la variation du périmètre en fonction de la longueur de la partie commune) et avec les dessins d'une des figures ayant le plus petit périmètre et d'une des figures ayant le plus grand périmètre (par exemple, le rectangle de 11 x 5) ou par un inventaire de toutes les possibilités.

3 Les deux réponses correctes, avec le dessin d'une des deux figures seulement, ou la présence des figures correctes mais avec erreurs de calcul du périmètre (écart d'une ou deux unités par rapport à la valeur exacte)

2 Les deux réponses correctes, sans aucune explication ni figure
ou une seule réponse correcte avec les deux figures

1 Une des deux réponses correctes, avec une seule des deux figures
ou deux réponses proches, avec dessins correspondants

0 Incompréhension

Degrés : 4 - 5 - 6

Origine : CI, D'après une idée de François Drouin, Irem de Lille, (voir revue APMEP 2003)

7. CARTES CARREES (Cat. 4, 5, 6)

Grégory a 81 cartes carrées, de même dimension, avec une face blanche et l'autre face grisée.

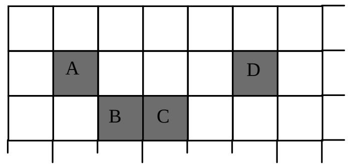
Il les dispose toutes, les unes contre les autres, pour obtenir un grand carré entièrement blanc.

Thomas lui propose un défi : *Essaie de retourner le plus possible de cartes pour faire apparaître leur face grisée.*

Mais attention, à la fin, chaque face grise devra avoir au moins 7 faces voisines blanches.

Deux cartes sont voisines si elles ont un sommet ou un côté commun.

(Dans cet exemple, les cartes A et C avec les faces grises ont 7 voisines avec des faces blanches, et D en a 8, mais B n'en a que 6 !)



Combien de cartes Grégory peut-il retourner au maximum ?

Expliquez votre raisonnement et dessinez une de vos solutions.

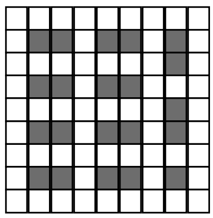
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : positions relatives de carrés dans un quadrillage
- Logique et raisonnement : recherche d'une disposition maximale

Analyse de la tâche

- Comprendre que le carré initial est un quadrillage de 9 x 9, dont toutes les cases sont blanches.
- Comprendre que l'expression « au moins 7 » se traduit ici par 7 ou 8.
- Comprendre que les cartes retournées ne peuvent pas être celles du bord car elles n'auraient que 5 voisines blanches, ni celles des angles car elles n'auraient que 3 voisines blanches.
- Se rendre compte que les faces grises « isolées » à l'intérieur de la grille ont chacune 8 voisines blanches et répondent ainsi à la condition. Si toutes les faces grises étaient isolées, on pourrait en placer au maximum 16, régulièrement.
- Se rendre compte ensuite que deux faces grises peuvent avoir un côté ou un sommet commun et, par exemple, former un rectangle de 2 x 1. On peut ainsi placer 10 rectangles de ce type, isolés les uns des autres, et une face grisée seule, ce qui fait monter le nombre total des cases grisées à 21.



Attribution des points

4 Réponse optimale (21) avec explications et une grille correctement dessinée

3 Réponse optimale (21) avec explication peu claire et sans dessin
ou réponse « 20 » avec explications ou dessin

2 Réponse optimale (21) sans explication ni dessin

1 Réponse (20) sans explications ni dessin
ou réponse (différente de 21 et 20) avec dessin respectant la condition de voisinage

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4 - 5 - 6

Origine : Rencontre de Bourg-en-Bresse, sur une idée de Suisse romande

8. UNE CROISSANCE EXTRAORDINAIRE (Cat. 5, 6, 7)

Quand ils vivaient dans notre pays, Hugues mesurait 115 cm, Léo 130 cm, Sara 135 cm, Eddy 145 cm.

Depuis quelques années ils vivent dans un autre pays nommé « Biengrandir », où l'unité de mesure est le *gra*.

Aujourd'hui, ils se mesurent et ils voient que Hugues a grandi de 7 *gra*, Léo de 6 *gra*, Sara et Eddy ont grandi chacun de 3 *gra*.

Sara s'aperçoit d'une chose étrange : maintenant ils n'ont plus quatre tailles différentes, mais deux enfants ont la même taille et les deux autres aussi.

Trouvez à combien de cm correspond le *gra*.

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Mesure de grandeurs : unités conventionnelles et non conventionnelles
- Arithmétique : addition et multiplication

Analyse de la tâche

- Chercher quels peuvent être les enfants de même taille : Sara et Eddy ne peuvent pas l'être, il reste deux possibilités, Hugues-Sara et Léo-Eddy ou Hugues-Eddy et Léo-Sara.
- Dans la première hypothèse, la différence de 20 cm (135 – 115) entre Sara et Hugues serait compensée par une différence de 4 *gra* (7 – 3), ce qui donnerait 5 cm pour 1 *gra*, et la différence de 15 cm (145 – 130) entre Eddy et Léo serait compensée par la différence de 3 *gra* (6 – 3), ce qui donne aussi 5 cm pour 1 *gra*.

  Dans la seconde hypothèse, la différence de 5 cm (135 – 130 entre Sara et Léo serait compensée par une différence de 3 *gra* (6 – 3), ce qui donnerait 5/3 cm pour 1 *gra*, et la différence de 30 cm (145 – 115) entre Eddy et Hugues serait compensée par la différence de 4 *gra* (7 – 3), ce qui donnerait 7,5 cm pour 1 *gra*, en contradiction avec la précédente.

  La seconde hypothèse est à rejeter et la première conduit à la correspondance 1 *gra* = 5 cm.

Ou : Procéder de manière systématique, en attribuant des valeurs successives au *gra*, en cm, calculer les tailles des enfants quand ils ont grandi comme indiqué, et observer les résultats :

	Taille atteinte par chacun en cm :			
valeur, en cm, à attribuer au *gra*	HUGUES	LÉO	SARA	EDDY
1	7x1+115=122	6x1+130=136	3x1+135=138	3x1+145=148
2	7x2+115=129	6x2+130=142	3x2+135=141	3x2+145=151
…	…	…	…	…
5	7x5+115=**150**	6x5+130=**160**	3x5+135=**150**	3x5+145=**160**
6	157	166	153	163
7	164	172	157	167
8	171	178	160	170

- Comprendre que, si on continue à donner d'autres valeurs au *gra*, il ne sera plus possible d'avoir deux paires de personnes de la même taille : Sara et Eddy auront toujours la même différence de taille, Léo a dépassé Sara entre 1 et 2 cm et Eddy à 5 cm, Hugues a dépassé Sara à 5 cm et Eddy entre 7 et 8 cm.

Ou : procéder en faisant des essais au hasard, sans alors pouvoir conclure à l'unicité de la solution.

Attribution des points

4 Réponse correcte avec explication claire montrant que la réponse : 1 *gra* = 5 cm, est bien déterminée et unique

3 Réponse correcte obtenue par essais systématiques sans justification montrant que tous les cas ont été examinés

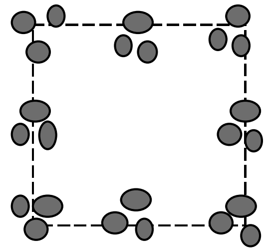
2 Réponse correcte obtenue par essais au hasard
ou essais systématiques mais avec erreurs de calculs

1 Début de raisonnement correct (quelques essais au hasard, avec vérification, mais n'aboutissant pas)

0 Incompréhension du problème

Niveau : 5 - 6 –7 **Origine :** Val d'Aoste

9. UN ŒIL SUR LES PIERRES ! (Cat. 5, 6, 7)



Julien est en vacances à la mer. Sur la plage, il ramasse des pierres et les dispose par petits tas de trois, en forme de carré, comme sur ce dessin :
Selon cette disposition, il y a 9 pierres par côté.
Julien ramasse encore 4 autres pierres et, avec les premières, forme une nouvelle disposition :

- il y a de nouveau 8 tas, disposés en carré ;
- il y a de nouveau 9 pierres par côté ;
- il y a le même nombre de pierres dans tous les tas situés au milieu des côtés du carré.

Combien peut-il y avoir de pierres dans les tas de la nouvelle disposition ?

Montrez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, décomposition d'un nombre
- Géométrie

Analyse de la tâche :

- Comprendre que le même nombre de pierres, 9 sur un côté, peut être obtenu avec de nombreux triplets différents et, éventuellement, en dresser l'inventaire : 1-1-7, 1-2-6, 1-3 5, 1-4-4, 2-2 5, 2-3-4, 3-3-3.
- Par des essais, se rendre compte que chacun de ces triplets peut conduire à des carrés de 9 pierres sur les côtés et avec un même nombre de pierres au milieu des côtés. Par exemple, avec les nombres (on peut le faire aussi avec des dessins) :

a

1	1	7
1		1
7	1	1

b

1	7	1
7		7
1	7	1

c

1	3	5
3		3
5	3	1

d

1	**5**	**3**
5		**5**
3	**5**	**1**

e

2	2	5
2		2
5	2	2

f

2	**5**	**2**
5		**5**
2	**5**	**2**

- Parmi toutes les dispositions données dans les exemples, et les autres, retenir celles dont la somme est 28, c'est-à-dire les deux dispositions d et f.

Ou : Commencer par la condition « 28 pierres au total » en remarquant que deux côtés parallèles utilisent 9 pierres chacun en 6 tas et laissent 10 pierres (28 – (2 x 9) = 10) pour les deux tas du milieu des autres côtés et en en déduisant qu'il y a 5 pierres dans les tas du milieu.

- Il ne reste plus alors que les deux triplets 1-5-3 et 2-5-2 à examiner.

Attribution des points

4 Réponse exacte (les deux dispositions « d » et « f » des exemples précédents) : production des deux solutions avec liste des nombres ou dessin, avec explication

3 Une seule solution trouvée et expliquée
ou les deux dispositions « d » et « f » avec une troisième qui est isométrique à « d » par une rotation d'un quart de tour (où la ligne supérieure est « 3-5-1 »)

2 Deux solutions trouvées mais sans explications

1 Une seule solution trouvée sans explications
ou une ou plusieurs solutions ne respectant pas l'une des consignes (comme « a », « b », « c », « e » par exemple)

0 Incompréhension du problème

Niveau : 5 - 6 - 7

Origine : Genova

10. LA PLUS PETITE DIFFÉRENCE (Cat. 5, 6, 7)

Cette grille est partagée en deux régions par une ligne continue, épaisse, qui suit le quadrillage.

Lorsqu'on additionne les nombres de chacune de ces régions, on constate que la différence entre les deux sommes obtenues est 39.

3	15	16	22
7	13	2	43
40	30	35	17
19	18	12	5

Il est possible de trouver une différence plus petite en découpant la grille en deux parties seulement, selon d'autres lignes.

Dessinez la ligne de partage qui donne la plus petite différence possible et notez vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition de nombres et compensations
- Logique et raisonnement : organisation des échanges entre cases

Analyse de la tâche

- Vérifier la donnée en effectuant les sommes
- Effectuer des essais et chercher à améliorer le résultat par compensation (par exemple, sur la grille donnée, voir qu'en faisant passer la case « 16 » dans la partie de gauche, la différence diminue de 32)
- Constater que, la somme étant de 297, on n'arrivera pas à une différence inférieure à 1, entre 149 et 148. Une solution consiste à échanger le « 15 » qui passe à droite, contre le « 30 » et le « 5 » qui passent à gauche.

  Solutions optimales : il y a au moins ces deux-là, avec 148 et 149

3	15	16	22
7	13	2	43
40	30	35	17
19	18	12	5

3	15	16	22
7	13	2	43
40	30	35	17
19	18	12	5

Attribution des points

4 Une solution minimale, avec dessin et sommes conduisant à 148 et 149

3 Une solution avec une différence de 3 avec dessin correct et sommes de 147 et 150 ou la solution minimale, sans toutes les explications demandées

2 Une solution avec une différence de 5 avec dessin correct et sommes de 146 et 151 ou la solution avec une différence de 3, sans toutes les explications demandées

1 Une solution avec une différence de 7 ou 9 avec dessin correct et sommes de 144 ou 145 et 153 ou 155 ou autres solutions avec fautes de calcul

0 Incompréhension du problème ou aucune solution meilleure trouvée

Niveau : 5 - 6 - 7

Origine : 6e RMT (sur une idée de Bourg-en-Bresse)